

Modelagem numérica do coeficiente de transferência de calor por convecção em sistemas aletados segundo ondas quadradas aleatórias

Numerical modeling of the convective heat transfer coefficient in fin systems using random square waves

JOÃO VITOR PEREIRA

Discente de Engenharia Mecânica (UNIPAM)
joaovitorpereira@unipam.edu.br

BRUNO BATISTA GONÇALVES

Professor orientador (UNIPAM)
brunobg@unipam.edu.br

Resumo: A análise dos perfis térmicos em sistemas aletados apresenta desafios significativos devido à complexidade e à aleatoriedade das interações entre os fatores envolvidos. Este estudo teve como objetivo desenvolver um modelo numérico para descrever o perfil térmico por convecção em sistemas aletados retangulares sob turbulência, utilizando o método das Ondas Quadradas Aleatórias (OQA). A abordagem incluiu a parametrização pelo método OQA e resolução numérica do sistema para obtenção dos perfis térmicos. Os resultados indicaram concordância com às expectativas físicas, mas ainda existem limitações, especialmente no que diz respeito à observação entre os parâmetros do método OQA e as propriedades mencionadas, que podem ser aperfeiçoadas. Concluiu-se que o método OQA é uma ferramenta eficiente para modelagem térmica, com potencial para aprimoramento em futuras análises.

Palavras-chave: Método OQA; turbulência; sistemas aletados; solução numérica.

Abstract: The analysis of thermal profiles in finned systems presents significant challenges due to the complexity and randomness of the interactions among the factors involved. This study aimed to develop a numerical model to describe the convective thermal profile in rectangular finned systems under turbulence, using the Random Square Wave (RSW) method. The approach included parameterization through the RSW method and numerical resolution of the system to obtain the thermal profiles. The results showed agreement with physical expectations; however, limitations remain, particularly regarding the relationship between the RSW method parameters and the mentioned properties, which could be improved. It was concluded that the RSW method is an efficient tool for thermal modeling, with potential for enhancement in future analyses.

Keywords: RSW method; turbulence; finned systems; numerical solution.

1 INTRODUÇÃO

Nas mais diversas áreas de aplicação da engenharia térmica se faz imprescindível a determinação do fluxo térmico; nas aplicações práticas associados a

trocas térmicas, tais como a geração de vapor d'água em caldeiras e aquecimento ou resfriamento em trocadores de calor, as trocas térmicas entre os fluidos determinam a eficiência desses processos. Há, assim, pesquisas que buscam por novos meios tanto para aumentar as taxas de transferência de calor quanto para isolar as trocas térmicas em variadas aplicações.

Uma forma para aumentar as taxas de transferência de calor são as aletas, as quais favorecem a transferência de calor por convecção ao aumentar a área de superfície sólida exposta ao meio externo, na qual é possível a passagem de fluxo de calor (Çengel; Ghajar, 2012). Porém, as soluções analíticas que modelam a transferência de calor em aletas para diversas geometrias e condições de contorno distintas são baseadas em condições de contorno aproximadas e hipóteses heurísticas, tal como o coeficiente de transferência de calor por convecção "h" presente na lei de resfriamento de Newton (Canedo, 2018).

O coeficiente h é uma variável de difícil determinação, pois depende das diversas variáveis relacionadas às condições de escoamento, notadamente a turbulência, e às propriedades físicas e termodinâmicas do fluido. Essas variáveis possuem uma relação complexa entre si, e normalmente são necessários métodos experimentais e parâmetros adimensionais a fim de se avaliar o seu efeito no valor do coeficiente h (Çengel; Ghajar, 2012). Em geral, o coeficiente h é aplicado baseado em tabelas e relações aproximadas, as quais não se adequam à complexidade real da fenomenologia em tela.

A maioria das aplicações práticas envolvem escoamentos em regime de turbulência. Os escoamentos turbulentos, em função de sua característica caótica e aleatória, conferem à análise uma complexidade ainda maior, de maneira que um dos métodos de tratamento das variáveis, a fim de simplificações também, se dá por correlações estatísticas (Schulz, 2003; Gonçalves, 2014).

Porém, o tratamento estatístico das equações diferenciais governantes gera termos que contêm covariâncias, como o produto de flutuações, por exemplo, e esses termos não possuem definições diretas, prescindindo de novos equacionamentos que trazem novos termos de covariância de ordem maior, tal condição leva ao problema de não fechamento do sistema (havendo sempre mais incógnitas que equações, o que leva às suposições heurísticas).

Nesse contexto, um modelo proposto por Schulz *et al.* (2011a, 2011b), que soluciona o problema do não fechamento, é o método das Ondas Quadradas Aleatórias (OQA). O método permite parametrizar uma propriedade do fenômeno de transporte turbulento representando-a como uma onda quadrada bimodal aleatória, obtendo-se funções a priori que serão utilizadas nos equacionamentos com finalidade de parametrização.

As aplicações do método OQA retornaram resultados satisfatórios nos trabalhos desenvolvidos acerca do assunto, tais como análise da transferência turbulenta de massa em Gonçalves (2014), Schulz *et al.* (2011b) e Schulz e Janzen (2009), e também na análise da transferência turbulenta de calor unidimensional segundo células convectivas de Rayleigh Benard (Gonçalves, 2014).

Diante desse cenário, o objetivo geral desta pesquisa é aplicar o método OQA em um sistema aletado de transferência térmica turbulenta a fim de se desenvolver um equacionamento para o fluxo térmico. Isso será feito através de uma modelação do perfil

térmico e do coeficiente de transferência térmica por convecção, além de comparação entre modelos empíricos já existentes (ver Çengel; Ghajar, 2012).

Os objetivos específicos consistem em: (1) aplicar o método OQA nas equações diferenciais de conservação de energia; (2) obter o perfil térmico na camada limite adjacente à aleta; (3) desenvolver o equacionamento do fluxo térmico; (4) comparar os resultados com os modelos empíricos já existentes.

Resguardada a ilação da importância dos estudos de engenharia que envolvem trocas térmicas turbulentas, a aplicação do método OQA em sistemas aletados é desejável tanto para a busca por um melhor entendimento do coeficiente de transferência de calor por convecção, na dedução do fluxo térmico, quanto para a validação e aplicabilidade do método em si.

2 REVISÃO TEÓRICA

2.1 LEIS DE CONSERVAÇÃO E TRANSFERÊNCIA DE CALOR

Os princípios de conservação estão presentes nos mais diversos fenômenos da natureza. Em um determinado sistema ou volume de controle, algumas grandezas físicas, como a massa, a energia, a quantidade de movimento e o momento angular, conservam-se, isto é, o balanço entre as quantidades que entraram e as que saíram corresponde à variação total da grandeza no volume de controle (Çengel; Cimbala, 2013). Em alguns casos, leva-se em consideração também a diferença entre as quantidades geradas e consumidas.

Neste trabalho, no qual as trocas de energia térmica são dominantes, destaca-se a importância da lei da conservação da energia, cujo equacionamento governante é definido pela equação (1):

$$\frac{dE}{dt} = \sum[\dot{m}(h + e_c + e_p)] + \sum\dot{Q} + \sum\dot{w} \quad (1)$$

Na equação (1), E é a energia total do sistema em [J], \dot{m} é a vazão mássica em [kg/s], h é a entalpia, e_c é a energia cinética específica, e_p é a energia potencial específica, as três últimas em [J/kg], \dot{Q} é o fluxo de calor do sistema e \dot{W} é o trabalho sofrido pelo sistema, os dois últimos em [J/s].

A transferência da energia térmica ocorre na presença de um gradiente térmico, sendo a direção da transferência de energia da maior para a menor temperatura. Os tipos de mecanismos de transferência de calor são: condução, convecção e radiação. Transferências por condução ocorrem em fronteiras sólidas com diferença de temperatura entre as faces externas, enquanto a convecção ocorre devido à agitação do fluido próximo à fronteira sólida, e, por fim, a radiação ocorre através da propagação de ondas eletromagnéticas entre corpos, mesmo que no vácuo (Çengel; Cimbala, 2013).

Como a convecção depende do fluxo da matéria, ela é diretamente afetada pelo regime de escoamento do fluido (Castro, 2017). No regime turbulento, as partículas do fluido seguem padrões erráticos ou caóticos. Assim, conforme Canedo (2018), a convecção é um mecanismo de transferência em que as propriedades são transportadas

através do escoamento. É importante observar que o movimento do fluido é provocado por meios externos ao fenômeno de troca de calor (Roma, 2006). Neste trabalho, a modelação está baseada nas condições de convecção na camada limite térmica.

2.2 LEI DE FOURIER

Como referido, um dos mecanismos de transferência de calor é a condução térmica, o qual se dá predominantemente em meios sólidos pela transmissão de energia de partículas. A quantificação desse processo é descrita pela lei de Fourier, que afirma que a taxa de transferência de calor por unidade de área é proporcional ao gradiente de temperatura local, dado pela equação (2) (Schulz, 2003; Canedo, 2018; Çengel; Ghajar, 2012):

$$\vec{q} = -k \nabla T \quad (2)$$

Na equação (2), q é o fluxo de calor por unidade de área em $[W/m^2]$, k_T é a condutividade térmica do material em $[W/m.K]$ e $\vec{\nabla}T$ é o gradiente de temperatura em $[K/m]$. A presença do sinal negativo indica que o sentido da transferência de calor é contrário ao gradiente.

2.3 LEI DE RESFRIAMENTO DE NEWTON

O fenômeno das trocas de calor por convecção possui, em geral, uma alta complexidade de análise em razão da combinação entre efeitos condutivos e o escoamento do fluido, o qual em muitas aplicações é turbulento (Çengel; Ghajar, 2012).

A quantificação do fluxo de calor total convectivo é resumida na equação (3), conhecida como lei do resfriamento de Newton, expressa em termos do fluxo de calor total e por unidade de área:

$$Q = hcA(T_s - T_\infty) \quad (3)$$
$$q = hc(T_s - T_\infty)$$

Na equação (3), h é o coeficiente de transferência de calor por convecção em $[W/m^2.K]$, A é a área da superfície sólida em contato com o meio fluido em $[m^2]$, T_s é a temperatura da superfície sólida em $[K]$ e T_∞ é a temperatura do meio fluido em $[K]$.

Apesar da aparente simplicidade das equações (3), a complexidade das trocas de calor convectivas ainda está presente no coeficiente de transferência de calor por convecção. A determinação do valor deste coeficiente é, geralmente, feita de forma empírica, pois depende da complexa interação entre variáveis como velocidade do escoamento, viscosidade, densidade, condutividade térmica e calor específico do fluido, rugosidade da superfície sólida, entre outras.

Alternativamente, a convecção pode ser avaliada pelas trocas de energia mecânica e térmica, e a lei que rege esse fenômeno, proveniente da equação (1), é dada pela equação diferencial (4) (Smith; Van Ness; Abbott, 2013):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \rho c_p (\nabla^2 T) - \vec{V} \cdot \nabla T \quad (4)$$

Na equação (4), \vec{V} é o vetor velocidade em [m/s], ρ é a densidade do fluido em [kg/m³], c_p é o calor específico a pressão constante em [J/kg.K] e t é o tempo em [s].

2.4 PARÂMETROS ADIMENSIONAIS

Conforme Schulz (2003), para simplificação das análises de processos físicos com

várias propriedades, empregam-se os números adimensionais baseados no método de análise dimensional. Assim, a análise dimensional é comumente utilizada em problemas de convecção, pois reduz o número total de variáveis presentes no equacionamento.

O número de Prandtl (Pr), por exemplo, é um número adimensional que relaciona a difusividade térmica, com relação ao transporte de energia interna e a viscosidade do meio fluido, para com o transporte de momento linear (Canedo, 2018). Em transferência de calor, esse número adimensional auxilia na análise da espessura relativa das camadas limite de momento e térmica.

No contexto das trocas de calor por convecção em regime de turbulência, três desses parâmetros são especialmente importantes, sendo definidos conforme as seguintes equações:

$$Nu = \frac{hL}{k} \quad (5)$$

$$Pr = \frac{\mu c_p}{k} \quad (6)$$

$$Re = \frac{\rho v L}{\mu} \quad (7)$$

A equação (5) representa o número de Nusselt; a equação (6), o número de Prandtl

anteriormente comentado; a equação (7), o número de Reynolds, sendo L um comprimento característico em [m], μ é a viscosidade dinâmica do fluido em [Pa.s], c_p é o calor específico a pressão constante do fluido [J/kg.K] e v é a velocidade do fluido em [m/s].

Canedo (2018) explica que o número de Nusselt assume grandes valores quando predomina a convecção nas trocas de calor, e valores pequenos quando predomina a condução. Segundo Çengel e Ghajar (2012), o número de Prandtl compara a difusividade da quantidade de movimento com a difusividade térmica, assumindo grandes valores quando aquela é mais expressiva que esta e pequenos valores, caso contrário. Ainda de acordo com esses autores, o número de Reynolds está relacionado

ao regime de escoamento do fluido. Os métodos empíricos de determinação do coeficiente de película são diretamente dependentes desses três parâmetros adimensionais.

2.5 SISTEMAS ALETADOS

As aletas ou superfícies estendidas são elementos dispostos sobre uma superfície, constituídos de um material condutor térmico, cuja finalidade é aumentar a área de transferência de calor por convecção entre a superfície sólida e o meio fluido; os elementos podem possuir diversas geometrias distintas e, entre elas, podem-se citar as geometrias retangular, cilíndrica, triangular e parabólica (Canedo, 2018).

A quantificação analítica do fluxo de calor em sistemas aletados é feita construindo-se uma equação de conservação de energia de um elemento da aleta que corresponde à sua seção transversal com uma espessura infinitesimal. São levados em consideração parcelas de condução e convecção, e obtém-se ao final a equação diferencial (8) que governa as trocas de calor em aletas com área de seção transversal e condutividade térmica constantes:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0 \quad (8)$$

Na equação (8), θ é a temperatura normalizada em um ponto da aleta, $m = \sqrt{hp/kA}$ é o coeficiente da aleta e p é o perímetro da aleta em [m].

A equação diferencial (8) é linear de segunda ordem com coeficientes constantes, e, portanto, pode ser resolvida através de processo analítico (Boyce; Dippima, 2020). Em função dessa facilidade, existem soluções bem definidas para diversas geometrias, mas todas ainda possuem um teor empírico devido à presença do coeficiente de transferência de calor por convecção h .

2.6 CAMADA-LIMITE

Em escoamentos externos afastados de corpos sólidos, a hipótese de que as tensões viscosas são insignificantes em relação às inerciais é válida, e, portanto, os termos viscosos são desprezados. Entretanto, nas regiões do escoamento próximas a uma parede ou obstáculo sólido, a condição de não escorregamento na interface sólido-fluido torna as tensões viscosas significativas na análise global do escoamento, e essa região é conhecida como camada-limite hidrodinâmica (White, 2018).

Analogamente, a continuidade do campo escalar de temperatura exige que haja uma transição suave entre a temperatura do meio sólido e aquela do meio fluido; a região na qual ocorre essa transição é denominada camada-limite térmica. Roma (2006) afirma que a fronteira da camada-limite térmica com o escoamento externo corresponde aos pontos cuja temperatura corresponde a 99% da temperatura do meio externo.

As camadas-limite hidrodinâmica e térmica coexistem na região próxima à interface sólido-fluido, porém, não necessariamente coincidem (Castro, 2017; Schulz, 2003). A dificuldade do estudo analítico da camada-limite, aliada à frequente ocorrência

de turbulência no escoamento, foi o principal fator que levou à definição do coeficiente h .

2.7 ESCOAMENTOS TURBULENTOS

Conforme já descrito, a turbulência se caracteriza pelo movimento errático do meio fluido, sendo um fenômeno matematicamente complexo. Segundo Mathieu e Scott (2000), a turbulência é um fenômeno natural oscilatório e não previsível, o qual apresenta flutuações de velocidades numa vasta gama de diferentes escalas de comprimento e de tempo.

Muitos escoamentos observados na natureza e a maior parte dos escoamentos práticos de engenharia se dão de modo turbulento. A turbulência é um fenômeno complexo de ser modelado analiticamente, e a utilização de métodos semi-empíricos é dominante nas aplicações práticas.

Um dos métodos de análise da turbulência em escoamentos consiste na aplicação de ferramentas estatísticas nas equações, decompondo as propriedades em um valor médio e uma flutuação em torno deste. Assim, no estudo da turbulência considera-se a evolução de determinadas grandezas no espaço e tempo, definindo-as através de funções médias como recurso à minimização da complexidade natural do fenômeno.

Davidson (2004) informa que essa tática de fato atenuou a complexidade do problema, no entanto o surgimento de termos associados à média de um produto de flutuações impossibilitou o fechamento do sistema de equações. Assim, pesquisadores propuseram modelos empíricos para sanar essa dificuldade. No âmbito teórico, um dos métodos propostos para contornar o problema do não fechamento é o método OQA, apresentado na próxima seção.

Schulz *et al.* (2011a) distinguem os modelos propostos entre a priori e a posteriori. Assim, modelos a priori definem em sua conceituação todas as grandezas iniciais para o estudo. Quanto aos modelos a posteriori, as grandezas que caracterizam o não fechamento são estudadas em separado, considerando-se modelos empíricos ou heurísticos. O método OQA é considerado um modelo a priori.

2.8. MÉTODO OQA

Proposto por Schulz (1985 *apud* Gonçalves, 2014, p. 56), o método OQA consiste na representação de uma propriedade em turbulência por meio de uma onda quadrada bimodal aleatória em torno do seu valor médio. Conforme Gonçalves (2014), o perfil normalizado da variável é definido pela equação (9), em termos da concentração em transferência de massa, mas também válido para a temperatura:

$$n = \frac{c - c_{\infty}}{c_s - c_{\infty}} \quad (9)$$

A variável c é a concentração de massa, o índice “s” corresponde à superfície, o índice “ ∞ ”, ao meio fluido, e \underline{c} é o valor médio. A função n será considerada como um perfil normalizado de transferência da propriedade em análise.

Posteriormente, Schulz e Janzen (2009) observaram que a amplitude do sinal da onda, dada pela diferença entre \underline{c} e c_s ou entre \underline{c} e c_∞ , sofre uma redução em razão dos efeitos de difusividade molecular, e para considerar esse efeito, foi definida uma função de redução α , variando de 0 a 1, que corresponde ao percentual de diminuição da amplitude. Para fins de simplificação da análise, a função α foi considerada constante em grande parte dos trabalhos sobre o método OQA (Castro, 2017; Gonçalves, 2014).

Segundo Gonçalves (2014), a concentração e a velocidade são duas grandezas que devem ser levadas em conta na transferência de calor em turbulência. A dedução da função coeficiente de correlação entre as flutuações dessas grandezas revela uma dependência direta do RMS (média quadrática) da velocidade e da concentração. Gonçalves (2014, p. 66) afirma que as flutuações advêm da mesma causa, portanto se espera que os registros das flutuações de velocidade e de concentração sejam, ao menos, parcialmente sobrepostos. Assim, essa característica deve ser considerada na análise, e isso é feito através de uma função de superposição $0 \leq \beta \leq 1$, de modo que $\beta = 1$ indica uma sobreposição total e $\beta = 0$ uma sobreposição inversa.

As funções n , α , β e RMS da velocidade são definidas a priori, isto é, são definidas antecipadamente e permitem a parametrização dos termos da equação governante sem a necessidade de processos ad hoc. Com isso, os termos estatísticos já são predefinidos e o problema do não fechamento é solucionado (Schulz, 1985; Schulz; Schulz, 1991; Schulz; Janzen, 2009; Schulz, 2011a, 2011b; Gonçalves, 2014, para mais detalhes acerca do método OQA).

2.9. MÉTODO DE EULER

O método de Euler é um método direto empregado para obter solução numérica para equações diferenciais ordinárias de primeira ordem com condições iniciais conhecidas. Assim, é aproximada para problemas de valor inicial da forma $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{t}, \mathbf{y})$, $\mathbf{y}(\mathbf{t}_0) = \mathbf{y}_0$.

O procedimento consiste em definir um passo h que representa a distância entre dois valores de t consecutivos, ou seja, t_n e t_{n+1} . Feito isso, e tomando $y = \phi(t)$ como a solução particular desejada, calcula-se qualquer $y_{n+1} = \phi(t_{n+1})$ através da fórmula de Euler:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(t_n, y_n) \quad (10)$$

Uma vez que as equações obtidas através da modelação via OQA resultam em equações diferenciais não lineares, torna-se necessária a aplicação de métodos numéricos para a solução das mesmas; o método de Euler é considerado apropriado aos problemas de valores iniciais e foi empregado pelos autores relacionados a esta área de estudo em seus desenvolvimentos.

3 METODOLOGIA

O presente trabalho é de natureza teórico-numérica, envolvendo a análise de resultados numéricos obtidos a partir dos desenvolvimentos de equacionamentos propostos. Trata-se de uma pesquisa básica e descritiva.

A metodologia consistiu no aprofundamento dos assuntos e conceitos relacionados

à transferência de calor e do método OQA, sendo subdividida em cinco etapas principais:

(i) definição da equação do fenômeno: foram analisados os parâmetros da fenomenologia das trocas térmicas em sistemas aletados a fim de se adequar a equação governante coerente ao processo;

(ii) ampliação do referencial teórico: foram realizadas pesquisas com vistas a ampliar o conhecimento sobre as soluções empíricas da literatura clássica em relação ao fenômeno em estudo;

(iii) parametrização da equação obtida em (i) pelo método OQA: os termos da equação foram decompostos em média e flutuação, reorganizados e parametrizados pelas funções n , α , β e RMS da velocidade através das expressões fornecidas pelo método OQA. Nessa etapa, foi observada a necessidade de adequação de uma das equações parametrizadas do método OQA comparada a trabalhos anteriores.

(iv) determinação do perfil térmico: foi definida e desenvolvida uma solução numérica do equacionamento desenvolvido em (iii) a fim de se obter o perfil de troca térmica.

(v) comparação de resultados: foi feita uma análise comparativa entre os resultados obtidos em (iv) e as soluções empíricas estudadas em (ii) em relação ao perfil térmico por convecção.

4 RESULTADOS PARCIAIS

4.1 ADAPTAÇÃO DE NOVA PARAMETRIZAÇÃO NO MÉTODO OQA

Ao longo das revisões e análises das parametrizações propostas para as variáveis de modo a priori pelo método OQA, observou-se que a definição dada (vide equação (11)) para o termo do produto de flutuação de temperatura pela derivada de segunda ordem da temperatura (derivada de variáveis médias) tem uma proposição de sinal em sua definição que os autores presentes consideram equivocada. Foi realizada uma nova determinação do termo em questão e se propõe uma alteração nesta definição, dada pela equação (12), a qual será considerada nos desenvolvimentos deste trabalho.

Haverá alternância de sinais no último termo entre chaves entre as equações supracitadas, e, portanto, deve-se avaliar o impacto dessa nova definição sobre os estudos já desenvolvidos.

4.2 MODELAGEM E EQUAÇÕES

Foi considerado um modelo bidimensional para análise de um sistema aletado, considerando-se aletas de formato retangular, paralelas entre si e igualmente espaçadas. Por tais condições, a evolução da camada limite térmica será considerada semelhante à de uma placa plana, ou seja, com o estudo em relação ao topo das aletas. O escoamento preferencial foi considerado paralelo à placa, direção x , e em regime turbulento. As aletas foram consideradas grandes o suficiente para que se tornem desprezíveis as variações

médias das propriedades do escoamento ao longo de x , permitindo a adoção de perfis estacionários das médias de velocidade e temperatura.

A análise do escoamento se restringiu às coordenadas y e z , considerando-se uma turbulência estacionária em que as oscilações das flutuações de velocidade fossem semelhantes a uma grade oscilante no estudo de trocas mássicas em tanques. Na direção y , ocorre a evolução da camada limite de transferência térmica. O regime de transferência e escoamento foram considerados permanentes.

A figura 1 ilustra as condições adotadas nesse modelo simplificado.

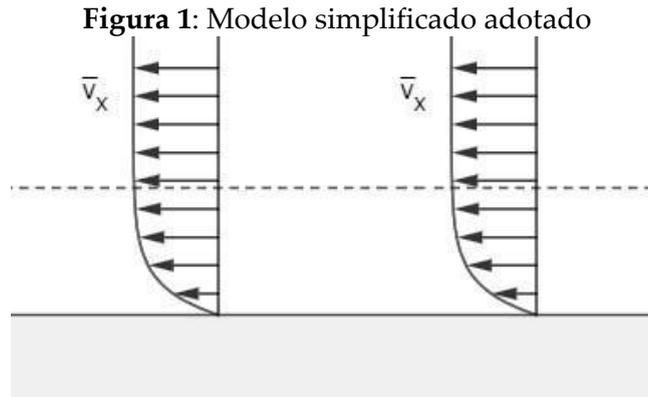


Figura 1: Modelo simplificado adotado

Fonte: autoria própria, 2024.

As condições acima foram aplicadas na equação (4) de conservação da energia tratada estatisticamente, resultando na equação (13), e considerados os balanços de momentos centrais de ordem 0 e 1 (ver Gonçalves, 2014, p. 61-62, para detalhamento), equações (14) e (15), a princípio, e, se necessário, ordens superiores serão consideradas. Em seguida, foram introduzidos os parâmetros do método OQA para parametrização das variáveis, resultando no sistema de equações (16).

$$\frac{1}{\theta+1} \left(\underline{u} \frac{\partial T'^{\theta+1}}{\partial x} + \frac{\partial (u' T'^{\theta+1})}{\partial x} \right) = \frac{k_t}{\rho c_e} \left(T'^{\theta} \frac{\partial^2 T'}{\partial z^2} + T'^{\theta} \frac{\partial^2 T'}{\partial x^2} + T'^{\theta} \frac{\partial^2 T'}{\partial z^2} \right) \quad (13)$$

Na equação (13), u é a velocidade preferencial na direção x , o apóstrofo representa os termos com flutuações de temperatura e velocidade e a barra representa o operador média, e θ a ordem do balanço dos momentos centrais.

$$\frac{\partial u' T'}{\partial x} = \frac{k_t}{\rho c_e} \left(\frac{\partial^2 T'}{\partial z^2} \right) \quad (14)$$

$$\frac{1}{2} \left(\underline{u} \frac{\partial T'^2}{\partial x} + \frac{\partial u' T'^2}{\partial x} \right) = \frac{k_t}{\rho c_e} \left(T' \frac{\partial^2 T'}{\partial x^2} + T' \frac{\partial^2 T'}{\partial z^2} \right) \quad (15)$$

$$\left\{ \frac{\partial^2 T'}{\partial z^2} = (T_S - T_\infty) \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} \frac{\partial u' T'}{\partial x} = (T_S - T_\infty) \frac{\partial}{\partial x} \left[n(1-n)A(2\beta-1) \sqrt{u'^2} \left(\sqrt{\frac{B}{1-B}} + \sqrt{\frac{1-B}{B}} \right) \right] \right\} \quad (16)$$

Na equação (16), A representa $(1-\alpha)$, e B representa a relação $(\beta+n-2\beta n)$. Evidentemente vários passos algébricos foram aqui omitidos, e muitos outros se mostraram necessários a fim de se simplificar o sistema de equações (16), podendo inclusive ser necessária a adição de mais equações de ordem superior. Em geral, foram seguidas as tentativas de simplificação já operadas em trabalhos anteriores, como em Gonçalves (2014), e a seguir investigadas as condições de contorno físicos do problema para decisão da operacionalidade da solução numérica a ser adotada.

O sistema (16) não é linear, mas a forma como as derivadas de segunda ordem aparece nas equações possibilita que estas sejam explicitadas em função das derivadas de primeira ordem. Isso permite a aplicação de um método numérico para equações diferenciais ordinárias. Como se trata de um problema de valores de contorno, um no topo da aleta ($\mathbf{z} = 0$) e outro no meio externo distante ($\mathbf{z} \rightarrow \infty$), as derivadas de primeira ordem talvez precisem de serem supostas até que ambas as condições de contorno sejam satisfeitas.

As parametrizações e definições do método OQA aplicadas nas equações (14) e (15) estão descritas nos sistemas (17) e (18) a seguir, respectivamente.

$$\left\{ \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = (T_S - T_\infty) \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} \frac{\partial u' T'}{\partial x} = (T_S - T_\infty) \frac{\partial}{\partial x} \left[n(1-n)A(2\beta-1) \sqrt{u'^2} \left(\sqrt{\frac{B}{1-B}} + \sqrt{\frac{1-B}{B}} \right) \right] \right. \quad (17)$$

$$\left\{ \frac{\partial T'^2}{\partial x} = (T_S - T_\infty)^2 (1-2n) \frac{\partial(n(1-n)A^2)}{\partial x} \frac{\partial u' T'^2}{\partial x} = (T_S - T_\infty)^2 \frac{\partial}{\partial x} \left\{ n(1-n)A^2 \sqrt{u'^2} \left[B \sqrt{\frac{B}{1-B}} + (B-1) \sqrt{\frac{1-B}{B}} \right] \right\} T' \frac{\partial^2 T'}{\partial x^2} = n(1-n)A(T_S - T_\infty)^2 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} T' \frac{\partial^2 T'}{\partial z^2} = n(1-n)A(T_S - T_\infty)^2 \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \right. \quad (18)$$

Após a aplicação do método OQA sobre os sistemas (17) e (18), resultaram as equações (19) e (20) de grau 0 e 1, respectivamente.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[n(1-n)A(2\beta-1) \sqrt{u'^2} \left(\frac{1}{\sqrt{B(1-B)}} \right) \right] = \frac{k_t}{\rho c_e} \left(\frac{\partial^2 n}{\partial z^2} \right) \quad (19)$$

$$\frac{\bar{u}(1-2n)}{2} \left(n(1-n) \frac{\partial A^2}{\partial x} + (1-2n)A^2 \frac{\partial n}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ n(1-n)A^2 \sqrt{u'^2} \left[\frac{B}{\sqrt{B(1-B)}} - \sqrt{\frac{1-B}{B}} \right] \right\} = \frac{k_t}{\rho c_e} n(1-n)A \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \right) \quad (20)$$

Contudo, o equacionamento resultante ainda se mostrou consideravelmente complexo, ao depender de muitas variáveis extras, principalmente advindas do método OQA aplicado. Em razão disso, foi imprescindível a adoção de novas suposições simplificadoras, substituiu-se $I = n(1-n)(2\beta-1) \sqrt{u'^2} \left(\frac{1}{\sqrt{B(1-B)}} \right)$ com o intuito de diminuir as incógnitas e auxiliar no algebrizar matemático. Assim, trabalharam-se equações (19) e (20) com enfoque principal nas derivadas e, devolvendo a definição resultante da primeira na segunda pelo termo I com o A constante, chegou à equação.

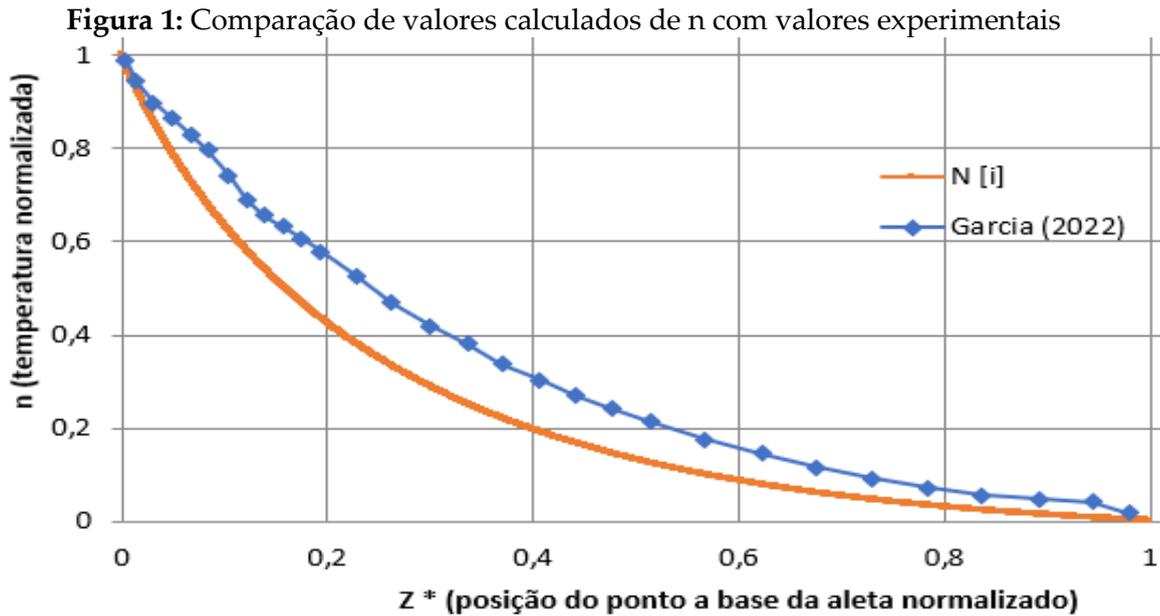
Após um amplo processo de análise e discussões, com o objetivo de equilibrar a consistência física das equações e a viabilidade de uma solução, chegou-se à formulação final do modelo simplificado.

$$\frac{(\beta+n-2\beta n-1) \left[\frac{k_t}{\rho c_e} \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} - \frac{\left(2 \frac{k_t}{\rho c_e} \frac{\partial n}{\partial z} + C \right) \partial \beta}{(2\beta-1) \partial x} \right] + \frac{\left(\frac{k_t}{\rho c_e} \frac{\partial n}{\partial z} + C \right) \left[\frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial n}{\partial x} - 2\beta \frac{\partial n}{\partial x} - 2n \frac{\partial \beta}{\partial x} \right]}{= -u(1-2n)^2 A \frac{\partial n}{\partial x}} \quad (21)$$

Nesse modelo, não se considerou qualquer tipo de escoamento preferencial, e as flutuações de velocidade e temperatura foram restringidas à direção z , reduzindo o problema a uma configuração unidimensional. O domínio de solução foi limitado à região a partir da superfície superior da aleta (z positivo). Em termos práticos, tal modelo pode ser comparado a uma grade oscilante, cuja função é agitar um fluido ou mistura estacionária em uma câmara, com o propósito de promover sua mistura e homogeneização. Esse tipo de abordagem é frequentemente encontrado em estudos de transferência turbulenta de oxigênio na interface ar-água, conforme descrito em diversas pesquisas como Gonçalves (2014) e Schulz *et al.* (2011a).

O método de Euler foi utilizado para a solução numérica, e seu detalhamento pode ser encontrado em Chapra e Canale (2016). Para sua devida implementação, a equação (21) foi rearranjada algebricamente com intuito de obter a função de explicitar para a derivada de segunda ordem de n em função das demais variáveis. Nesse processo de isolamento, nomeou-se a derivada primeira de n para s . A simulação foi, então, implementada em uma planilha eletrônica do software Microsoft Excel®, a princípio subdividindo a escala de 0 a 1 do eixo z em 10.000 passos iguais.

A simulação numérica foi executada considerando-se as propriedades do ar atmosférico a 25° C, para o qual $\frac{k_t}{\rho c_e} = 2,249 \times 10^{-2} \text{ m}^2/\text{s}$. Foi considerado o valor da primeira derivada negativa pois o perfil térmico esperado da função é decrescente, além do valor da constante de integração resultado do processo matemático sendo nulo. O valor de $\frac{\partial \beta}{\partial x}$ foi fixo ao longo do eixo z , pois foi realizada uma análise unidimensional do comportamento da função ao decorrer do proposto. Entretanto, a função de β foi mantida e calculada ao longo dos passos do método de Euler. Os resultados obtidos foram representados graficamente, o que gerou o gráfico, em laranja, da Figura 1. Nele também se encontra a comparação do perfil térmico com os dados experimentais de Garcia *et al.* (2022), em azul.



Fonte: dados da pesquisa, 2024.

Observa-se na Figura 1 que o perfil térmico aprimorado pelo meio do método OQA apresenta uma boa aproximação em relação ao comportamento esperado fisicamente, especialmente no que diz respeito à forma geral da curva. Apesar dos desafios inerentes à modelagem completa do escoamento térmico, historicamente têm sido adotados modelos aproximados específicos para cada uma das diferentes regiões de escoamento (laminar, transição e turbulento). Esses modelos visam garantir a precisão e a continuidade das variações nas interfaces, o que foi mantido utilizando uma única formulação.

Assim, o perfil teórico proposto pelo método destacou as principais tendências da dissipação térmica, como a diminuição da característica exponencial do gradiente térmico e a convergência para uma assíntota ao final da transferência de calor. Ainda assim, foram observadas pequenas discrepâncias em relação ao perfil experimental, particularmente em posições específicas na base do sistema desenvolvido, especialmente em regiões de transição ou em condições em que o regime térmico não se comporta de forma transparente (zona de transição). Essas diferenças podem estar relacionadas a limitações propostas inicialmente nesse trabalho para resolução do método OQA.

O perfil apresentado na Figura 1 está, de forma geral, em concordância com o comportamento esperado fisicamente. A temperatura diminui de maneira gradual e, à medida que se avança em direção à região turbulenta, ocorre uma transição progressiva no comportamento térmico. Próximo à borda da zona de transferência, a redução da temperatura torna-se menos acentuada, refletindo o aumento da influência dos mecanismos de transporte por convecção e turbulência. Essa mudança é consistente com o aumento do efeito das flutuações térmicas de velocidade, que promovem maior homogeneidade térmica e alteram o gradiente de temperatura. Essas observações corroboram o comportamento teórico esperado para escolhas com transição de regimes térmicos, reforçando a validade do modelo na descrição das principais características do campo térmico.

5 CONCLUSÃO

Os desenvolvimentos efetuados denotam as dificuldades comumente encontradas no estudo analítico da transferência térmica em sistemas aletados, ainda considerando-se aqui simplificações notáveis quanto à geometria e condições do escoamento e transferência térmica.

Esta pesquisa representa um progresso nos estudos da modelagem estatística da transferência de calor turbulenta modelada segundo o método OQA, ao se propor uma correção de sinal em uma das equações fundamentais do método e ao perfil térmico obtido para satisfazer as previsões físicas.

A reavaliação de cada parametrização do método OQA possibilitou averiguar um erro de sinal em uma das derivadas de variáveis médias, sendo assim foi proposta uma nova relação pelos autores desta pesquisa, a qual será observada nos desenvolvimentos seguintes à pesquisa.

O perfil experimental segue um comportamento qualitativamente semelhante ao do teórico Garcia (2022) e apresenta pequena divergência do modelo em algumas regiões intermediárias, porém essas diferenças são comuns em análises de transferência de calor. Isso pode ser resultado de diversos fatores, como imperfeições no material, flutuações de velocidade (efeitos de condução transversal), entre outros.

Recomenda-se que trabalhos subsequentes dediquem esforços à investigação dos seguintes pontos: modelar e solucionar o problema da transferência de calor turbulenta pelo método OQA sem adotar a hipótese de uma função constante. Além disso, sugere-se a realização de que o modelo possa ser aprimorado para incluir os vãos entre as aletas e as trocas térmicas horizontais, avaliando as equações em mais de uma dimensão.

REFERÊNCIAS

- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. Rio de Janeiro: LTC, 2020.
- CANEDO, E. L. **Fenômenos de transporte**. Rio de Janeiro: LTC, 2018.
- CASTRO, G. B. **Transferência convectiva turbulenta unidimensional de calor modelada segundo o método de ondas quadradas aleatórias com função coeficiente de redução constante**. Monografia (Graduação) – Centro Universitário de Patos de Minas, Patos de Minas, 2017.
- CHAPRA, Steven C.; CANALE, Raymond P. **Métodos numéricos para engenharia**. 7. ed. Porto Alegre: McGraw-Hill, 2016.
- ÇENGEL, Yunus A; CIMBALA, John M. **Mecânica dos fluidos: fundamentos e aplicações**. São Paulo: Mc Graw Hill, 2013.

ÇENGEL, Yunus A.; GHAJAR, Afshin J. **Transferência de calor e massa**. Porto Alegre: Mc Graw Hill, 2012.

DAVIDSON, P. A. **Turbulence: an introduction for scientists and engineers**. Oxford, University Press Inc, New York, 2004.

FRÓES, J. M. A. M.; GONÇALVES, B. B. Solução numérica da transferência térmica em camada-limite turbulenta modelada segundo ondas quadradas aleatórias. *In: XXIX CONGRESSO NACIONAL DE ESTUDANTES DE ENGENHARIA MECÂNICA. Anais [...]*. Goiânia, 2023.

FROES, J. M. A. M.; GONÇALVES, B. B. **Modelagem numérica do coeficiente de transferência térmica por convecção em sistemas aletados segundo ondas quadradas aleatórias**. 2023. Iniciação Científica. (Graduando em Engenharia Mecânica) - Centro Universitário de Patos de Minas. Orientador: Bruno Batista Gonçalves.

GARCIA, R. L.; SAUER, M. C.; AMARAL, R. A.; ZABADAL, J. R. S. Experimento didático de baixo custo para determinação do perfil de temperatura de uma aleta exposta ao ar ambiente. **Revista Liberato**, [S. l.], v. 22, n. 38, p. 189-200, 2022.

GONÇALVES, B. B. **Detalhando a solução unidimensional do método OQA com função coeficiente de redução constante aplicado ao transporte escalar interfacial turbulento**. 185 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2014.

INCROPERA, F. P. *et al.* **Fundamentos de transferência de calor e de massa**. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

MATHIEU, J.; SCOTT, J. **An Introduction to turbulent flow**. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

ROMA, W. N. L. **Fenômenos de transporte para engenharia**. 2. ed. São Carlos: Roma, 2006.

SCHULZ, H. E. **Investigação do mecanismo de reoxigenação da água em escoamento e sua correlação com o nível de turbulência junto à superfície**. 1985. Dissertação (Mestrado em Hidráulica e Saneamento) – Universidade de São Paulo, São Carlos, 1985.

SCHULZ, H. E. **O essencial em fenômenos de transporte**. São Carlos: Editora USP, 2003.

SCHULZ, H. E.; JANZEN, J. G. Concentration fields near air-water interfaces during interfacial mass-transport: oxygen transport and random square wave analysis. **Brazilian Journal of Chemical Engineering**, v. 26, n. 3, p. 527-537, São Paulo, 2009.

SCHULZ, H. E.; SCHULZ, S. A. G. **Modelling below-surface characteristics in water reaeration**. Water pollution, modeling, measuring, and prediction. Computational Mechanics Publications and Elsevier Applied Science, p. 441-454, Southampton, 1991.

SCHULZ, H. E.; LOPES JUNIOR, G. B.; SIMÕES, A. L. A.; LOBOSCO, R. J. **Onedimensional turbulent transfer using random square waves – scalar/velocity and velocity/velocity interactions**. In: Hydrodynamics: Advanced Topics, In Tech, Rijeka, p. 334, 2011(a)

SCHULZ, H. E.; SIMÕES, A. L. A.; JANZEN, J. G. Statistical approximations in gas-liquid mass transfer. In: KOMORI, S; MCGILLIS, W.; KUROSE, R. (eds.). **Gas Transfer at Water Surfaces 2010**, Kyoto University Press, Kyoto, p. 208-221, 2011(b)

SMITH, J. M.; VAN NESS, H. C.; ABBOTT, M. M. **Introdução à termodinâmica da engenharia química**. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.

WHITE, Frank M. **Mecânica dos fluidos: fundamentos e aplicações**. Porto Alegre: AMGH, 2018.